

Streszczenie

Motywacją do napisania rozprawy jest próba klasyfikacji pewnych rodzajów układów wektorów w przestrzeni Hilberta, które nie są bazami Riesz. Układy takie, wobec posiadanych własności znalazły szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach m.in. teorii przetwarzania sygnałów, redukcji szumu, matematyce stosowanej, mechanice kwantowej.

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów. W każdym rozdziale kładziemy nacisk na badanie innego układu generującego.

Rozdział pierwszy jest całkowicie poświęcony problemowi poszukiwania *krat dualnych* do danej kraty określonej w przestrzeni Hilberta. Krata, jako uogólnienie bazy Riesz, w wielu przypadkach okazuje się narzędziem użytecznym, posiadając własności, które nie są dostępne dla bazy. Rozdział zaczniemy od przypomnienia podstawowych definicji i własności krat, a niezbędnych w celach badawczych. Następnie zaprezentujemy wersję twierdzenia dylatacyjnego Naimarka w teorii krat. W końcowej części rozdziału, przy wykorzystaniu powyższego twierdzenia, przedstawimy w jaki sposób można opisać kraty wszystkie dualne do kraty Parsevala ze skończonym nadmiarem oraz do kraty w przypadku ogólnym.

W rozdziale drugim rozważane są *uogólnione układy Riesz* (ang. generalized Riesz systems). Układy te wywodzą się wprost z $\mathcal{PT}$ -symetrycznej (pseudohermitowskiej) mechaniki kwantowej. W treści rozdziału zaprezentowane zostaną warunki równoważne definicji uogólnionego układu Riesz oraz powiązanie pomiędzy nimi a ciągami pół-regularnymi. Pokażemy przykład ciągu pół-regularnego, który nie jest uogólnionym układem Riesz.

Począwszy od rozdziału trzeciego, rozważania przeniesiemy do przestrzeni Kreina, dlatego pierwsza część tego rozdziału stanowi wstęp do tej teorii. Następnie badać będziemy *ciągi J -ortonormalne* (ortonormalne według metryki indefinitnej). Ciągi J -ortonormalne są pewną podklasą uogólnionych układów Riesz. Wprowadzimy pojęcia ciągu J -ortonormalnego pierwszego/drugiego rodzaju. Następnie podamy zastosowania ciągu pierwszego rodzaju w $\mathcal{PT}$ -symetrycznej mechanice kwantowej. Końcowa część tego rozdziału dotyczy algorytmu, za pomocą którego można konstruować ciągi J -ortonormalne pierwszego, jak i drugiego rodzaju w przestrzeni Kreina. Finalnie, przedstawimy rezultat mówiący o tym, że każdy ciąg J -ortonormalny pierwszego rodzaju jest również J -kratą.

Kraty określone w przestrzeni Kreina, t.j., *J -kraty* badane są w rozdziale czwartym. Początkowa część dotyczy trzech, nierównoważnych definicji kraty w przestrzeni Kreina, które spotkać można w literaturze. Następnie podamy ogólniejszą definicję J -krat oraz formułę rekonstrukcyjną dla niej.

Końcowa część dotyczyć będzie J -krat typu Parsevala. Pokażemy przy użyciu teorii z rozdziału pierwszego, że nie istnieją dla niej inne J -kraty dualne typu Parsevala oprócz niej samej.

W dodatku A znaleźć można kod programu liczącego pierwiastki dla pewnego przykładu ciągu J -ortonormalnego pierwszego/drugiego rodzaju, w zależności od zadanego parametru.

Słowa kluczowe

krata, uogólniony układ Riesz, GRS, ciąg J -ortogonalny, krata Parsevala, baza Riesz, twierdzenie dylatacyjne Naimarka, J -krata, przestrzeń Kreina, ciąg biortogonalny, podprzestrzeń dualna, krata dualna

Abstract

The main goal of this thesis is a classification problem for some types of sequences of vectors in Hilbert spaces that are not Riesz bases. The motivation comes directly from recent progress in mathematical physics, especially in $\mathcal{PT}$ -symmetric quantum mechanics, but not limited to this field. These sequences are widely used, for example in signal processing and linear estimation. They are extremely useful, due to the fact that they possess properties that are unavailable for Riesz basis.

The thesis consists of four chapters. Each chapter is devoted to study one of the following sequences: frame, generalized Riesz system, J -orthonormal sequence, J -frame.

In the chapter one, we develop a new tool for searching so called *dual frames* for a given frame defined in Hilbert space. Frame, is a generalization of the Riesz basis in Hilbert space, and in many cases, it turns out to be useful, because of its properties, which are unavailable for basis, for example non-unique decomposition. For the convenience of the reader, we start first chapter with a revision of basic definitions and properties of frames. Next, we show a Naimark's dilatation theorem in the frame theory setting. Then, we use this theorem to describe all possible dual frames to a given frame in two cases: Parseval frame with a finite excess, and a frame in general.

The second chapter is devoted to the theory of *generalized Riesz systems* (GRS). They come straight from the field of $\mathcal{PT}$ -symmetric (pseudo-Hermitian) quantum mechanics. We present some equivalent condition for a sequence to be a GRS. Then, the relationship between GRS and semi-regular sequence is described. Finally, we present an example of a semi-regular sequence, which is not a GRS.

Starting from the chapter three, we jump into Krein space. In this chapter we explore the topic of J -orthonormal sequence (orthonormal with respect to an indefinite metric). Each J -orthonormal sequence is a GRS. Given the properties of J -orthogonal sequence, we divide this class into two subclasses (J -orthogonal sequence of the first/second type). Then we give the applications of the J -orthogonal sequence of the first type in $\mathcal{PT}$ -symmetric quantum mechanics. The last part contains an algorithm, using which it is possible to generate the sequence of first/second type. Finally, we show that each J -orthonormal sequence of the first type is also a J -frame.

Frames in Krein spaces, (J -frames) are studied in chapter four. At the beginning, we give three, non-equivalent definitions of frame in Krein space, which can be found in literature. Then we generalize the last definition of J -frames and provide a reconstruction formula for it. Next, we define a J -frame of Parseval type. Lastly, with using the theory from chapter one, the evidence that there is no other J -frame of Parseval type dual frame to a given one, but itself, is given.

In appendix A, there is the code for finding the roots for an example of J -orthonormal first/second kind sequence, depending on the parameter.

Keywords

frame, generalized Riesz system, GRS, J -orthogonal sequence, Parseval frame, Riesz basis, Naimark dilation theorem, Krein space, J -frame, bi-orthogonal sequence, dual frame, dual subspaces, dual definite subspaces