

Kraków, 15 kwietnia 2021

Dariusz Cichoń
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

**Recenzja rozprawy doktorskiej Alana Kamudy pod tytułem
*Kraty oraz uogólnione układy Riesz. Własności oraz zastosowania***

Chociaż pojęcie kraty (aby uniknąć zamieszania będę posługiwał się terminologią użytą w pracy doktorskiej, choć można mieć do niej uwagi; tłumaczenie angielskiego słowa *frame* jako „krata” jest lekko dyskusyjne) znane jest już od połowy ubiegłego wieku (praca Duffina i Schaeffera), to dopiero w bieżącym stuleciu tematyka ta zyskała znaczącą popularność. Mnie osobiście zdarzyło się pierwszy raz zetknąć z tym pojęciem, kiedy jeszcze jako student słuchałem referatu H.S. Shapiro ponad trzydzieści lat temu. Kraty okazały się użytecznym narzędziem w opisie przetwarzania sygnałów, komunikacji bezprzewodowej czy przetwarzania obrazów. Bardziej jednak niż tego rodzaju zastosowania o charakterze inżynierskim na popularność krat wpłynęło ich powiązanie z teorią falek oraz zagadnieniami fizyki matematycznej (praca Daubechies, Grossmanna i Meyera z 1985 roku) takimi jak stany koherentne. Inne zagadnienia, bliższe autorowi pracy, to badanie niesamosprężonych operatorów, które pojawiają się naturalnie w zagadnieniach mechaniki kwantowej. Wchodzą w ten zakres także tak zwane operatory PT -symetryczne, które stają się symetryczne względem nieokreślonego iloczynu skalarnego, inaczej mówiąc – w przestrzeni Kreina. Układy funkcji własnych dla takich operatorów stanowią impuls do rozważania abstrakcyjnych układów J -ortogonalnych, to jest ortogonalnych w przestrzeni Kreina z operatorem fundamentalnej symetrii J . Pomimo że powyższe omówienie w żadnej mierze nie wyczerpuje wszystkich kontekstów, w jakich pojawiają się kraty oraz ich uogólnienia, jest ono w mojej opinii wystarczające, aby uznać, że tematyka omawianej pracy doktorskiej znajduje się w głównym nurcie badań naukowych i może stanowić wartościowy wkład w aktualną tematykę badawczą. Należy tytuł podkreślić, że głównym przedmiotem zainteresowania autora są nie tyle zastosowania krat, ile spojrzenie na nie jako pojęcie abstrakcyjne.

Przejdę teraz do omówienia zawartości pracy, w ramach którego zawrę uwagi krytyczne, jak i przychylne. W rozdziale pierwszym znajdujemy definicję i podstawowe własności krat. Określone zostały: operator syntezy, sprzężony do niego operator analizy i operator kratowy. Wprowadzenie oceniam dobrze, choć są w nim usterki, na przykład błędne odwołanie do książki Christensena dla uzasadnienia wzoru (1.5); autor odsyła nas do partii książki poświęconej kratom skończonym, żeby uzasadnić wzór dla krat nieskończonych. Nie przepadam również za formułowaniem definicji tak, jak w przypisie 1 na stronie 15, gdzie niewyrobiony czytelnik mógłby mieć problem ze zrozumieniem, jak skwantyfikowane jest $\alpha > 0$. Na szczęście w dalszym ciągu pracy na ogół definicje stawiane przez autora były jednak jasne. Po omówieniu twierdzenia Naimarka dla krat, mówiącego, że każda krata Parsevala jest rzutem ortogonalnym bazy ortonormalnej z nadprzestrzeni, autor przechodzi do krat dualnych, ważnych ze względu na formuły rekonstrukcyjne. Zostaje nam przedstawione oryginalne podejście do opisu krat dualnych dla krat

Parsevala, w którym ważną rolę pełni Twierdzenie 1.11 charakteryzujące kraty dualne poprzez własności operatora Q związanego z wyjściową kratą. W kolejnym podrozdziale autor skupia się na kratach Parsevala z nadmiarem równym jeden. Jest to dość techniczny rachunkowo podrozdział, który przekonuje nas, że nawet przy restrykcyjnych, pozornie upraszczających założeniach mamy do czynienia z niebanalną matematyką. Pomińcie rachunki, które uzasadniają wzór (1.18), nie są krótkie – w takim przypadku autor powinien ostrzec czytelnika! W Przykładzie 1.17 mamy konflikt oznaczeń, bo wektory e_j w wyróżnionym wzorze (linia 7 od dołu) nie są tymi z początku strony. Rozdział kończy się charakterystyką krat dualnych do krat dowolnych, nadal przy użyciu twierdzenia Naimarka dla krat.

W rozdziale drugim wprowadzone zostały uogólnione układy Riesz, w których zasadniczym elementem definiującym staje się samosprężony nieograniczony operator Q , który dla zwykłych baz Riesz powstaje z konstrukcji operatora kratowego. Uogólnione układy Riesz to stosunkowo świeże pojęcie w wprowadzone przez Inoue i Takakurę w 2016 roku w powiązaniu z niesamosprężonymi hamiltonianami. Twierdzenie 2.7 stanowi cenną charakterystykę uogólnionych układów Riesz, w której rozważa się między innymi rozszerzenie Friedrichsa nieujemnego operatora S , naturalnie skojarzonego z ciągiem półregularnym. W ciekawym Przykładzie 2.9 pojawia się ciąg półregularny niebędący uogólnionym układem Riesz. W ostatnim podrozdziale tego rozdziału, poświęconym półregularnym ciągom Bessela znajduje się problematyczny Lemat 2.15, w którym twierdzi się, że przy założeniu ograniczonej widma Q z góry dla każdej bazy ortonormalnej $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ układ postaci $e^{Q/2}e_j$ jest uogólnionym układem Riesz. Operator $e^{Q/2}$ jest ograniczony, ale $e^{-Q/2}$, czyli operator odwrotny – już niekoniecznie, więc na pewno można wskazać bazę ortonormalną, która będzie zawierała elementy spoza dziedziny $e^{-Q/2}$, a w skrajnym przypadku – nawet bazę rozłączną z dziedziną, podczas gdy w definicji mamy wymaganie, aby baza zawierała się w dziedzinach e^Q i e^{-Q} . Wątpliwy moment w dowodzie to stwierdzenie, że $\mathcal{F}_{\varphi}$ jest półregularny. Dopuszczam myśl, że popełniłem błąd w mojej analizie Lematu 2.15, lecz jeśli mam rację, to pewne partie pracy stają pod znakiem zapytania. Na szczęście dla autora, lemat ten nie ma większego znaczenia dla pracy, poza być może Twierdzeniem 2.16 i Przykładem 2.17. Wprawdzie w dowodzie Lematu 3.16 autor powołuje się na Twierdzenie 2.16, ale ten lemat można wykazać wprost, nie korzystając z Twierdzenia 2.16. Nie wykluczam, że Twierdzenie 2.16 jest prawdziwe – tę kwestię proponuję omówić w czasie publicznej obrony pracy doktorskiej.

Tematem kolejnego rozdziału są ciągi J -ortonormalne. Tutaj J odnosi się do operatora symetrii fundamentalnej, za pomocą którego w przestrzeni Hilberta definiuje się nieokreślony iloczyn skalarny, czyli buduje się strukturę przestrzeni Kreina. Istotne staje się tu pojęcie podprzestrzeni dualnych, z którymi kojarzy się operator kontrakcji, a ten z kolei – z operatorem symetrycznym określonym za pomocą (nieujemnej) transformacji Cayleya. Rozszerzenia tego operatora do operatora samosprężonego odpowiadają maksymalnym rozszerzeniom par przestrzeni dualnych w przestrzeni Kreina. W Lemacie 3.3 widzimy usterkę, punkt (ii) odpowiada raczej sytuacji, w której $\|T_0\| \leq 1$. Okazuje się, że quasi-maksymalność par podprzestrzeni można scharakteryzować poprzez pewne relacje operatora S skojarzonego z taką parą w powiązaniu z samosprężonym operatorem Q , dla którego e^{-Q} jest nieujemnym rozszerzeniem, co jest treścią ładnego Wniosku 3.15. W dalszym ciągu wprowadzone zostały pojęcia ciągów J -ortonormalnych, pierwszego i

drugiego rodzaju, gdzie podziału dokonuje się ze względu na quasi-maksymalność podprzestrzeni nieujemnych i niedodatnich skojarzonych z ciągiem. Fenomen taki może mieć miejsce właśnie w przestrzeni Kreina, ze względu na jej bogatą strukturę, której nie ma w wyjściowej przestrzeni Hilberta. W niebanalnym Twierdzeniu 3.22 znajdujemy charakteryzację ciągów J -ortonormalnych jako obrazów pewnej bazy ortogonalnej. Kolejny podrozdział poświęcony jest C -symetriom, za pomocą których można uzyskać formuły rekonstrukcyjne w specjalnych podprzestrzeniach przestrzeni Kreina. Spory fragment rozdziału trzeciego to opis konstrukcji ciągów J -ortonormalnych pierwszego i drugiego rodzaju, a precyzyjniej: metody konstrukcji, która w zależności od parametrów pozwala produkować ciągi pierwszego lub drugiego rodzaju. Jest to około siedmiu stron, na których imponująca sprawność rachunkowa łączy się z pomysłowym wykorzystaniem wypracowanych wcześniej narzędzi teoretycznych. Rozdział zamykają przykłady operatorów fizyki matematycznej, oscylatora harmonicznego i anharmonicznego, w których pojawiają się ciągi pierwszego rodzaju, co ma swoje konsekwencje dla tych operatorów. Jest to również dobra motywacja dla rozważania takich ciągów.

Ostatni, czwarty rozdział poświęcony jest J -kratom, czyli kratom w sensie przestrzeni Kreina. Z analizy definicji 4.2 wynika, że proste przeniesienie własności krat z przestrzeni Hilberta nie daje nic nowego. Kolejne podejście, przez warunek narzucony na obrazy operatora syntezy (obraz „dodatni” i „ujemny”) dla ciągu Bessela również ma swoje wady. Kolejne definicje J -krat sprowadzają się do tego, by maksymalność i jednostajną określoność (niezmienność znaku) zastąpić maksymalnością w połączeniu ze zwykłą określonością, a następnie rozważać quasi-maksymalność (to wszystko z zachowaniem wariantu założenia o spełnieniu nierówności jak dla krat). Użyteczność ostatniej, najszerzej definicji została potwierdzona formułami rekonstrukcyjnymi, analogicznymi do formuł dla zwykłych krat (Wnioski 4.11 i 4.14), bo niewątpliwie bardzo pożądane jest, aby takie formuły zachodziły w jak najszerzej klasie obiektów definiowanych jako J -kraty. W dalszym ciągu omawiane są warunki na to, aby ciąg J -ortonormalny był J -kratą, a jednym z nich jest przynależność do klasy ciągów pierwszego rodzaju (Wniosek 4.22). Kolejnym tematem są J -kraty Parsewała, które w myśl Twierdzenia 4.24 są obrazami specjalnych Hilbertowskich krat Parsewała poprzez dodatni operator samosprężony. Podobnie jak dla zwykłych krat, można w tym przypadku badać kraty dualne znajdując opisy przypominające te z rozdziału pierwszego (Twierdzenie 4.28). Motywacją dla rozważania J -krat, wspomnianą parę razy w tym rozdziale, jest analiza sygnałów dźwiękowych z szumem, który chcielibyśmy wyeliminować.

Do innych partii pracy nie mam większych uwag, poza jedną, że warto było zacytować książkę Bognara *Indefinite Inner Product Spaces*.

Przejdę teraz do oceny pracy. Nie ulega moim zdaniem wątpliwości, że autor poradził sobie z tematyką, która wymagała od niego używania zaawansowanych narzędzi między innymi z teorii operatorów nieograniczonych. Wkład autora w niełatwą tematykę oceniam pozytywnie, zwłaszcza to, że składa się on z wielu rezultatów o charakterze abstrakcyjnym, choć są również fragmenty wymagające sporej wprawy rachunkowej – i to z użyciem programów komputerowych, co na pewno należy zaliczyć na korzyść autora. Strony redakcyjnej pracy nie oceniam niestety wysoko, o czym jeszcze napiszę szerzej, ale to nie zmienia mojej ogólnie pozytywnej oceny pracy.

Widać, że praca powstała jako kompilacja publikacji napisanych po angielsku. Po pewnym czasie przestałem już nawet notować liczne angielskie słówka, ale i całe frazy, które autor przegapił w trakcie tłumaczenia (np. s. 20, 26). W wersji papierowej pracy brakuje pełnej bibliografii, jest ona w wersji elektronicznej, w której zauważyłem też inne poprawki w porównaniu z papierową (np. Wniosek 1.23). Wiele jest także „literówek”, które przestałem w pewnym momencie odnotowywać, a tu wspomnę „punkowe” zamiast „punktowe” (s. 8), „zbór” zamiast „zbiór” (Wniosek 1.14). Niektóre fragmenty wyglądają jakby były pisane o czwartej nad ranem, np. strona 89. Mianownik liczby mnogiej od rzeczownika „podprzestrzeń” to „podprzestrzenie”, a nie „podprzestrzeni”. W języku polskim powinniśmy mówić o „metryce nieokreślonej”, nie „indefinitnej”. Tłumaczenie angielskiego „pre-Hilbert space” jako „przed przestrzeń Hilberta” (s. 50) oceniam jako potworek językowy, czy nie lepiej byłoby mówić o przestrzeni unitarnej lub z iloczynem skalarnym? Na stronie 61 czytamy: „Niech $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ jest...”. Pojawiają się też pewne niezręczności w notacji matematycznej. Wielokrotnie mamy do czynienia z różnymi wariantami greckiej litery „fi” (ϕ i φ) na oznaczenie tego samego obiektu (np. s. 41). Z kolei na stronie 61 symbol „J” obsługuje dwa różne obiekty, co stanowi konflikt oznaczeń. W podrozdziale 3.2.3 mowa jest o C -symetrii, przy czym symbol C jest tożsamy (w sensie czcionki) z pewnym operatorem, który jest C -symetrią. To sprawia wrażenie, jakby C -symetria była pojęciem zależnym od operatora C , co jest odległe od właściwego rozumienia definicji C -symetrii. Zdaję sobie sprawę, że to nie autor pracy wprowadził tę wątpliwą jakości notację, w przyszłości sugerowałbym, aby oznaczyć operator C -symetrii np. literą T . Po tych paru niemiłych uwagach wypada jednak stwierdzić, że na ogół autor dobrze radzi sobie z tym, co najważniejsze, czyli z przekazywaniem treści matematycznych.

Konkluzja. Zgodnie z moją wyrażoną powyżej opinią praca doktorska pana Alana Kamudy pt. *Kraty oraz uogólnione układy Riesza. Własności oraz zastosowania* spełnia ustawowe wymagania dotyczące stopnia naukowego doktora i może stanowić podstawę do nadania panu Alanowi Kamudzie stopnia naukowego doktora.

Dariusz Cichoń

Dariusz Cichoń