

Recenzja pracy doktorskiej mgr. Alana Kamudy pt.

*“Kraty oraz uogólnione układy Rieszsa.
Własności oraz zastosowania”*

Rozprawa doktorska pana mgr. Alana Kamudy została wykonana na Wydziale Matematyki Stosowanej Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie pod kierunkiem dr hab. Sergiusza Kuźela. Praca składa się ze streszczenia (w językach polskim oraz angielskim), wstępu, czterech rozdziałów, dodatku, spisu literatury (87 źródeł) i zawiera 102 strony.

Głównym celem pracy jest wprowadzenie szerokiej klasy układów wektorowych w przestrzeniach Hilberta lub Kreina i kompletne badania ich własności. Jedną z podstawowych motywacji takich badań teoretycznych może służyć rozwój aktywny tzw. $\mathcal{PT}$ -symetrycznej mechaniki kwantowej. W roku 1997 Bender i Boettcher zwrócili uwagę na ciekawe własności pewnej rodziny perturbacji klasycznych oscylatorów harmoniczych. Mimo niesamosprzężoności, takie operatory mogą posiadać widmo rzeczywiste, chociaż układy funkcji własnych nie necessarily są bazą ortogonalną czy nawet bazą Rieszsa. Praca ta spowodowała powstanie teorii $\mathcal{PT}$ -symetrycznych operatorów mechaniki kwantowej, która cieszy się dużą popularnością do dzisiaj. Własności spektralne rozważanych $\mathcal{PT}$ -symetrycznych hamiltonianów w sposób istotny zależą od tego, czy układy ich funkcji własnych są zupełne i czy tworzą bazę w tym lub innym sensie. Z tego punktu widzenia praca doktorska mgr. Alana Kamudy poświęcona jest ważnym problemom o charakterze teoretycznym oraz praktycznym.

Głównym obiektem badania w *pierwszym rozdziale* jest krata, tzn. układ wektorowy przestrzeni Hilberta $\mathcal{K}$ z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot)$, który służy naturalnym uogólnieniem pojęcia bazy Rieszsa. Jak i w przypadku bazy Rieszsa, każda krata $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j \mid j \in \mathbb{J}\}$ posiada kratę dualną $\mathcal{F}_\psi = \{\psi_j \mid j \in \mathbb{J}\}$ i zachodzi rozkład

$$f = \sum_{j \in \mathbb{J}} (f, \varphi_j) \psi_j = \sum_{j \in \mathbb{J}} (f, \psi_j) \varphi_j;$$

jednak taka krata dualna nie jest jednoznacznie wyznaczona w przypadku dodatniego nadmiaru (tzn. gdy układ $\mathcal{F}_\varphi$ pozostaje zupełny po usunięciu kilku wektorów). Po wprowadzeniu podstawowych definicji teorii krat autor stawia swoim celem opis wszystkich krat, dualnych do dowolnej kraty $\mathcal{F}_\varphi$. W podrozdziale 1.3 taka klasyfikacja została dokonana w przypadku, gdy $\mathcal{F}_\varphi$ jest kratą Parsevala (Twierdzenie 3.11). Dowód tego twierdzenia oparty jest na teorii dylatacji Naimarka i pozwala na konstruowanie krat dualnych do $\mathcal{F}_\varphi$ w sposób dość jawny. Ciekawe przykłady zastosowania takiej konstrukcji w mechanice kwantowej zostały zaproponowane w rozdziale 1.4. Jak pokazano dalej w lemacie 1.19, każdą kratę $\mathcal{F}_\psi$, dualną do ogólnej kraty $\mathcal{F}_\varphi$, uda się przekształcić do kraty, dualnej do pewnej kraty Parsevala, co otwiera możliwość zastosowania wyników podrozdziału 1.3 i dokonania dokładnego opisu

wszystkich krat dualnych $\mathcal{F}_\psi$. Moim zdaniem, jest to bardzo interesujący nowy wkład do teorii krat o znaczeniu teoretycznym a zarówno praktycznym. Rozdział ten opiera się na wyniki pracy [57].

Należy wymienić drobne nieścisłości matematyczne czy nieudane sformułowania, np. w definicji dodatnio określonego operatora (przypis dolny na s. 15) należy użyć nierówności nieścisłej (znak $\geq$) lub rozważać tylko niezerowe $f \in \mathcal{K}$ (patrz też punkt (iii) na stronie 33); zdanie *każda krata jest pewną perturbacją kraty Parsevala* lepiej sformułować *... pewną transformacją ...* (s. 18); we wniosku 1.10 operator P nie został wprowadzony, a suma $\varphi_j + \tilde{e}_j$ powinna być zapisana jako $\varphi_j \oplus \tilde{e}_j$ (s. 18); w pierwszym zdaniu wniosku 1.13 należy też wymienić kratę $\mathcal{F}_e$ (np., *Niech $\mathcal{F}_e$ oraz $\mathcal{F}_{e^0}$ będą kratami Parsevala w $\mathcal{K}$, k -krotność należy traktować jako K -krotność* (s. 22); w zdaniu *każda krata może zostać uzupełniona do bazy Riesz* chodzi o uzupełnienie w przestrzeni rozszerzonej (s. 28). Są tutaj też drobne literówki, np. *przestawione* (s. 13), *jednoznaczne określone* (s. 17), *Zbór* (s. 21) i inne.

Rozdział drugi oparty jest na wyniki pracy [58] i poświęcony uogólnionym układom Riesz. Wiadomo jest, że każdą bazę Riesz $\mathcal{F}_\varphi$ możemy podać w postaci $\varphi_j = e^{Q/2} e_j$ dla pewnej bazy ortonormalnej $\{e_j \mid j \in \mathbb{J}\}$ i operatora samosprzężonego i ograniczonego Q . W roku 2016, Inoue i Takakura wprowadzili uogólnienie pojęcia bazy Riesz — tzw. uogólnione układy Riesz — zezwalając w powyższej konstrukcji na nieograniczone operatory Q . Celem rozdziału 2 jest omówienie własności uogólnionych układów Riesz. Zauważmy, że każda baza $\mathcal{F}_\varphi$ przestrzeni Hilberta $\mathcal{K}$ jest ciągiem *pół-regularnym*, tzn. minimalnym oraz zupełnym w $\mathcal{K}$. Taki ciąg pół-regularny posiada układ biortogonalny $\mathcal{F}_\psi$, tzn. $(\varphi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$, co pozwala na wprowadzenie operatora S poprzez równości $S\varphi_j = \psi_j$. Głównym rezultatem rozdziału 2 jest twierdzenie 2.7, w którym pół-regularne uogólnione układy Riesz scharakteryzowane są w terminach samosprzężonych rozszerzeń operatora S . Na podstawie tego zaproponowane są przykłady ciągów pół-regularnych które nie są uogólnionymi układami Riesz.

Wymienimy też inne wnioski z twierdzenia 2.7. Jeśli ciąg $\mathcal{F}_\psi$ biortogonalny do ciągu pół-regularnego $\mathcal{F}_\varphi$ jest zupełny w $\mathcal{K}$ (a minimalny jest automatycznie), to $\mathcal{F}_\varphi$ oraz $\mathcal{F}_\psi$ nazywamy ciągami regularnymi. Okazuje się, że ciąg pół-regularny $\mathcal{F}_\varphi$ jest uogólnionym układem Riesz wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem regularnym (wniosek 2.10), a ograniczone z góry operatory Q w powyższej konstrukcji odpowiadają pół-regularnym ciągom Bessela (twierdzenie 2.16).

Drobne uwagi: *and* w (2.1) oraz *for all* w (2.8); na stronie 34 *dopełnienie* należy zamienić przez *uzupełnienie*; rozszerzenie Friedrichsa A_F nie jest najszerszym rozszerzeniem operatora nieujemnego A (s. 36) — na odwrót, dziedzina $A_F^{1/2}$ jest najmniejsza; w dowodzie wniosku 2.10 wartowałoby podać więcej szczegółów; zamiast $\mathcal{F}_e$ ma być $\mathcal{F}_e$ (s. 39), a e_j powinno być e_j (s. 40); są liczne przypadki używania ϕ_j zamiast φ_j . Kilka drobniejszych usterek pomijam.

W rozdziałach *trzecim oraz czwartym* badane są układy wektorowe w przestrzeniach Kreina, tzn. przestrzeniach Hilberta wyposażonych w iloczyn skalarny nieokreślony (metrykę indefinitną) $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$. Inspiracją do tego typu zagadnień służy $\mathcal{PT}$ -symetryczna mechanika kwantowa, która rozważa hamiltoniany niesymetryczne względem zwykłego iloczynu skalarnego w $\mathcal{K}$ ale będące operatorami J -symetrycznymi. Zazwyczaj takie operatory posiadają widmo punktowe rzeczywiste, ale układy funkcji własnych często nie tworzą baz ortogonalnych czy nawet nie są bazami Riesz. Jednym z głównych celów rozdziału 3 jest wyjaśnienie, pod jakim warunkiem te funkcje własne są uogólnionym układem Riesz.

Po omówieniu podstawowych pojęć teorii przestrzeni Kreina i własności dualnych podprzestrzeni w $\mathcal{K}$, autor udowadnia że każdy zupełny ciąg J -ortonormalny jest uogólnionym

układem Riesz (wniosek 3.17), co w stosunku do operatorów $\mathcal{PT}$ -symetrycznych oznacza, że w mnóstwie przykładów fizycznych zupełność układu ich funkcji własnych pociąga za sobą że tworzą one uogólniony układ Riesz. W przypadku, gdy $\mathcal{F}_\varphi$ jest również ciągiem pierwszego rodzaju, dodatkowo mamy reprezentację $\varphi_j = e^{Q/2}e_j$, gdzie operator Q jest samosprężony i przeciwkomutuje z J , a baza ortogonalna $\{e_j \mid j \in \mathbb{J}\}$ przestrzeni $\mathcal{K}$ złożona jest z funkcji własnych operatora J (twierdzenie 3.22). Z kolei, w takiej sytuacji istnieje tzw. operator $\mathcal{C}$ -symetrii, który pozwala wprowadzić strukturę przestrzeni Hilberta w pewnym rozszerzeniu $\mathcal{K}_{-Q}$ przestrzeni $\mathcal{K}$ oraz nową dekompozycję fundamentalną w $\mathcal{K}_{-Q}$. Jeśli dodatkowo φ_j są to funkcje własne pewnego operatora J -symetrycznego H , to H jest istotnie samosprężony w tej przestrzeni Hilberta $\mathcal{K}_{-Q}$; związane jest to z własnością symetrii niezłamanej (*unbroken symmetry*), aktywnie badanej w kontekście $\mathcal{PT}$ -symetrycznej mechaniki kwantowej od lat 2000-ych.

Ciekawe konstrukcje jawne ciągów pierwszego oraz drugiego rodzaju zaproponowane zostały w podrozdziale 3.3 w oparciu na idee Langer. W podrozdziale 3.4 rozważane są przykłady hamiltonianów $\mathcal{PT}$ -symetrycznych, mianowicie oscylatorów harmonicznego oraz anharmonicznego o potencjałach $\mathcal{PT}$ -symetrycznych i na podstawie rozwiniętej teorii zaproponowane zostały przestrzenie Hilberta, w których te operatory są istotnie samosprężone. W całości wyniki rozdziału trzeciego stanowią istotne uzupełnienie teorii uogólnionych układów Riesz w przypadku, gdy przestrzeń Hilberta $\mathcal{K}$ posiada również strukturę przestrzeni Kreina.

Jak i w poprzednich rozdziałach, zauważyłem kilka drobnych usterek matematycznych, np. w Lemacie 3.3(ii) powinno być $\|T_0\| \leq 1$ a nie $\|T_0\| = 1$ ponieważ jednostajnie dodatnia podprzestrzeń jest również dodatnią; w (3.11) należało by przypomnieć, że podprzestrzenie M_+ oraz M_- wprowadzone zostały na stronie 45; na stronie 50 termin *dopełnienie* został użyty w sensie *uzupełnienie*; φ_n są wartościami własnymi zamiast wektorami własnymi (s. 60), $\text{span}\{f_n\}$ zamiast $\text{span}\{\varphi_n\}$ (s. 60); w (3.36) symbol $\mathbb{J}$ oznacza operator chociaż jest to zbiór indeksów w pozostałej części rozprawy; oraz literówek, jak np. *przetawione* (s. 44), *Phillips'a* (s. 46), nieudane dzielenie *u-jemną* (s. 49), *maksymalnych podprzestrzeni dualnych* (s. 51); *każde maksymalne podprzestnienie* (s. 51); *J-ortonormalny ciągi* (s. 58), *Co dowodzi drugiej równości* (s. 59); *kilu* (s. 64) i inne.

Ostatni rozdział poświęcony jest rozwinięciu teorii krat w przestrzeni Kreina. Autor najpierw tłumaczy dlaczego poprzednie definicje J -krat nie są użyteczne i proponuje pojęcie, które opiera się w sposób istotny na geometrii przestrzeni Kreina (definicję 4.9). Dla takich J -krat wyprowadzone zostały wzory rekonstrukcyjne; dodatkowo zbadane zostały przypadki J -krat typu Parsevala oraz ciągów J -ortogonalnych. W rozdziale tym wykorzystywane są w sposób istotny wyniki poprzednich rozdziałów, co wskazuje na spójność treści rozprawy doktorskiej.

Drobnymi usterkami są wykorzystywanie terminu *rozpięcie* w sensie *powłoka* (s. 86), *dopełnienie* zamiast *uzupełnienie* (s. 87). Na stronie 80 autor stwierdza, że jeśli dla podprzestrzeni quasi-maksymalnych $\mathfrak{L}^+$ i $\mathfrak{L}^-$ zachodzi równość $\mathfrak{L}^+ \dot{+} \mathfrak{L}^- = \mathcal{K}$, to $\mathfrak{L}^\pm$ są to przestrzenie jednostajnie określone, ale nie odwołuje się do odpowiedniego źródła. Na stronie 84 używa autor *Since* zamiast *Ponieważ*; są też inne drobne usterki.

Jako wniosek najważniejszy rozprawy doktorskiej należy uznać uzupełnienie w sposób istotny wiedzy o kratkach i uogólnionych układach Riesz w przestrzeniach Hilberta oraz Kreina, a zarówno rozwinięcie nowych podejść i metod badań takich układów. Dowody głównych twierdzeń bazowano na nowoczesnych metodach teorii operatorów i podano są dość szczegółowo.

Zaletą tej pracy jest zilustrowanie wyprowadzonych twierdzeń teoretycznych na przykładach hamiltonianów $\mathcal{PT}$ -symetrycznych badanych w literaturze fizycznej.

Biorąc pod uwagę powyżej wymienione oceny i komentarze, uważam, że rozprawa doktorska pana mgr. Alana Kamudy "*Kraty oraz uogólnione układy Riesz. Własności oraz zastosowania*" spełnia wszystkie formalne wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczanie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

A handwritten signature in blue ink, reading "R. Hryniv" with a checkmark at the end.